

## 斯皮爾曼等級相關係數 Spearman's $\rho$

### 意義

小樣本統計中，替代皮爾森相關係數的無母數統計方法。

### 公式

與皮爾森相關係數相同，只是改成計算等級：

$$\rho = \frac{cov(x, y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

當兩個變數等級完全不相同時：

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$d_i$ =兩個變數的等級差

### 範例

比較美麗島電子報 2021 年國政民調的總統與閣揆施政滿意度有無關聯。

依民調結果排序總統與閣揆施政的滿意等級如下：

| president | prime minister |
|-----------|----------------|
| 0.578     | 0.520          |
| 0.598     | 0.542          |
| 0.593     | 0.535          |
| 0.56      | 0.487          |
| 0.489     | 0.463          |
| 0.476     | 0.443          |
| 0.496     | 0.450          |
| 0.550     | 0.486          |
| 0.478     | 0.436          |
| 0.537     | 0.469          |
| 0.555     | 0.482          |
| 0.546     | 0.483          |

| president | 等級 | prime minister | 等級 |
|-----------|----|----------------|----|
| 0.578     | 10 | 0.52           | 10 |
| 0.598     | 12 | 0.542          | 12 |
| 0.593     | 11 | 0.535          | 11 |
| 0.56      | 9  | 0.487          | 9  |

|           |    |                |    |
|-----------|----|----------------|----|
| president | 等級 | prime minister | 等級 |
| 0.489     | 3  | 0.463          | 4  |
| 0.476     | 1  | 0.443          | 2  |
| 0.496     | 4  | 0.45           | 3  |
| 0.55      | 7  | 0.486          | 8  |
| 0.478     | 2  | 0.436          | 1  |
| 0.537     | 5  | 0.469          | 5  |
| 0.555     | 8  | 0.482          | 6  |
| 0.546     | 6  | 0.483          | 7  |

由於前四筆資料的等級相同，因此只能使用皮爾森相關係數公式，計算等級的共變數與標準差。

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \bar{X})(y - \bar{Y})]$$

| president | 等級 x  | prime minister | 等級 y  | $x - \bar{X}$ | $y - \bar{Y}$ | $(x - \bar{X})(y - \bar{Y})$ |
|-----------|-------|----------------|-------|---------------|---------------|------------------------------|
| 0.578     | 10    | 0.520          | 10    | 3.5           | 3.5           | 12.25                        |
| 0.598     | 12    | 0.542          | 12    | 5.5           | 5.5           | 30.25                        |
| 0.593     | 11    | 0.535          | 11    | 4.5           | 4.5           | 20.25                        |
| 0.560     | 9     | 0.487          | 9     | 2.5           | 2.5           | 6.25                         |
| 0.489     | 3     | 0.463          | 4     | -3.5          | -2.5          | 8.75                         |
| 0.476     | 1     | 0.443          | 2     | -5.5          | -4.5          | 24.75                        |
| 0.496     | 4     | 0.450          | 3     | -2.5          | -3.5          | 8.75                         |
| 0.550     | 7     | 0.486          | 8     | 0.5           | 1.5           | 0.75                         |
| 0.478     | 2     | 0.436          | 1     | -4.5          | -5.5          | 24.75                        |
| 0.537     | 5     | 0.469          | 5     | -1.5          | -1.5          | 2.25                         |
| 0.555     | 8     | 0.482          | 6     | 1.5           | -0.5          | -0.75                        |
| 0.546     | 6     | 0.483          | 7     | -0.5          | 0.5           | -0.25                        |
| 平均        | 6.5   |                | 6.5   |               |               | 11.5                         |
| 標準差       | 3.452 |                | 3.452 |               |               |                              |

$$\rho = \frac{11.5}{3.452 \times 3.452} = 0.965$$