

## 變因子變異數分析 Two-Way ANOVA

### 意義

比較 2 個自變數(因子)的平均數是否有差異。雙因子變異數分析的重點在於瞭解兩個因子間的交互關係。

### 公式

變異	平方和 SS	自由度 df	均方和 MS	F 值
組內	$SS_{within} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{Y})^2$	$(k - 1) \times i \times j$	$\frac{SS_{within}}{df}$	
組間 因子 1	$SS_1 = i \times k \times \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{Y})^2$	$j - 1$	$\frac{SS_1}{df}$	$\frac{SS_1}{MS_{within}}$
組間 因子 2	$SS_2 = j \times k \times \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2$	$i - 1$	$\frac{SS_2}{df}$	$\frac{SS_2}{MS_{within}}$
交互作用	$SS_{inter} = k \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_k - y_i - y_j + \bar{Y})^2$	$(i - 1)(j - 1)$	$\frac{SS_{inter}}{df}$	$\frac{SS_{inter}}{MS_{within}}$

### 範例

下表是台灣近五年的平均住院天數，一般病床包含急性與慢性，特殊病床包含急重症與燒燙傷，試問三個城市不同病床間的平均住院天數是否有差異？

	一般病床					特殊病床				
台北	7.23	7.37	7.45	7.53	7.60	9.35	9.39	9.13	8.76	8.55
台中	7.71	7.89	8.03	8.14	8.30	8.63	8.71	8.79	8.38	9.70
高雄	7.84	7.99	7.95	7.99	7.92	9.67	9.98	9.81	10.07	10.6

資料來源：衛生福利部 2019-2015 年醫療機構現況及醫院醫療服務量統計年報

城市與病床 2 個因子中，分別有 3 個(台北、台中、高雄)與 2 個(一般病床、特殊病床)類型，構成  $3 \times 2 = 6$  種組合。同時每種組合各有 5(k)種情況，共計  $3(i) \times 2(j) \times 5(k) = 30$  個樣本。

變異數分析的重點在於比較組間與組內的平均數差異，因此先計算各組平均數。

	一般病床					特殊病床					合計		
	平均住院天數					$y_k$	平均住院天數					$y_k$	$y_i$
台北	7.23	7.37	7.45	7.53	7.60	7.44	9.35	9.39	9.13	8.76	8.55	9.04	8.24
台中	7.71	7.89	8.03	8.14	8.30	7.94	8.63	8.71	8.79	8.38	9.70	10.03	8.98
高雄	7.84	7.99	7.95	7.99	7.92	8.03	9.67	9.98	9.81	10.07	10.6	8.84	8.44
$y_j$						7.80						9.30	$\bar{Y} = 8.55$

## 1. 組內變異

$$\begin{aligned}
 SS_{within} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^5 (y_{ijk} - \bar{Y})^2 \\
 &= (7.23 - 7.44)^2 + (7.37 - 7.44)^2 + (7.45 - 7.44)^2 + (7.53 - 7.44)^2 + \\
 &\quad (7.60 - 7.44)^2 + (9.35 - 9.04)^2 + (9.39 - 9.04)^2 + (9.13 - 9.04)^2 + \\
 &\quad (8.76 - 9.04)^2 + (8.55 - 9.04)^2 + (7.71 - 7.94)^2 + (7.89 - 7.94)^2 + \\
 &\quad (8.03 - 7.94)^2 + (8.14 - 7.94)^2 + (8.30 - 7.94)^2 + (8.63 - 10.03)^2 + \\
 &\quad (8.71 - 10.03)^2 + (8.79 - 10.03)^2 + (8.38 - 10.03)^2 + (9.70 - 10.03)^2 + \\
 &\quad (7.84 - 8.03)^2 + (7.99 - 8.03)^2 + (7.95 - 8.03)^2 + (7.99 - 8.03)^2 + \\
 &\quad (7.92 - 8.03)^2 + (9.67 - 8.84)^2 + (9.98 - 8.84)^2 + (9.81 - 8.84)^2 + \\
 &\quad (10.07 - 8.84)^2 + (10.06 - 8.84)^2 = 2.35
 \end{aligned}$$

$$df_{within} = (k - 1) \times i \times j = (5 - 1) \times 3 \times 2 = 24$$

$$MS_{within} = \frac{2.35}{24} = 0.098$$

## 2. 因子變異：病床

$$\begin{aligned}
 SS_{bed} &= i \times k \times \sum_{j=1}^2 (y_j - \bar{Y})^2 \\
 &= 3 \times 5 \times [(7.80 - 8.55)^2 + (9.30 - 8.55)^2] = 16.86
 \end{aligned}$$

$$df_{bed} = j - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$MS_{bed} = \frac{16.86}{1} = 16.86$$

### 3. 因子變異：城市

$$\begin{aligned}SS_{city} &= j \times k \times \sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{Y})^2 \\ &= 2 \times 5 \times [(8.24 - 8.55)^2 + (8.98 - 8.55)^2 + (8.44 - 8.55)^2] = 2.98\end{aligned}$$

$$df_{city} = i - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$MS_{city} = \frac{2.98}{2} = 1.49$$

### 4. 交互作用：病床與城市

$$\begin{aligned}SS_{interaction} &= k \times \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (y_{kj} - y_i - y_j + \bar{Y})^2 \\ &= 5 \times [(7.44 - 7.80 - 8.24 + 8.55)^2 + (7.94 - 7.80 - 8.98 + 8.55)^2 \\ &\quad + (8.03 - 7.80 - 8.44 + 8.55)^2 + (9.04 - 8.24 - 9.30 + 8.55)^2 \\ &\quad + (10.03 - 8.98 - 9.30 + 8.55)^2 + (8.84 - 9.30 - 8.44 + 8.55)^2] \\ &= 5 \times 0.42 \\ &= 2.09\end{aligned}$$

$$df_{interaction} = (i - 1)(j - 1) = 2 \times 1 = 2$$

$$MS_{interaction} = \frac{2.09}{2} = 1.045$$

### 5. 總變異

$$SS_{within} + SS_{bed} + SS_{city} + SS_{interaction} = 2.35 + 16.86 + 2.98 + 2.09 = 24.28$$